Exercice 5.1

On considère un corps qui subit une rotation d'angle θ autour de l'axe Oz.

1. pour chaque point M du corps, écrire la nouvelle position **OM**'
2. en déduire le champ de déplacement **u**
3. que devient **u** si l'angle θ est faible (i.e petites déformations) ?
4. dans ce cas, monter que $\vec{u} = \vec{\omega} \times \mathrm{OM}$ avec $\vec{\omega} = (0,0,\theta)$
5. calculez le tenseur L, gradient de la transformation
6. calculez le tenseur B, tenseur des déformations de Cauchy-Green
7. calculez le tenseur des déformations de Green-Lagrange
8. conclure.

1. $\mathrm{OM}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathrm{rot}(\theta,\mathrm{ez})\ \mathrm{OM} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

2. $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{OM}'} - \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{MM}'} = \begin{pmatrix} \cos\theta-1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\cos\theta-1)-\sin\theta y \\ x\sin\theta+(\cos\theta-1)y \end{pmatrix}$

3. avec θ petit : $\vec{u} \approx \begin{pmatrix} -\theta^2/2 & -\theta \\ \theta & -\theta^2/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\theta y \\ \theta x \end{pmatrix}$

4. On peut écrire le déplacement sous la forme : $\vec{u} \approx \begin{pmatrix} 0 & -\theta & 0 \\ \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\theta y \\ \theta x \\ 0 \end{pmatrix}$

5. $\mathrm{L} = \mathrm{I} + \mathrm{grad}\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ car θ est proche de zero.

6. $\mathrm{B} = (\mathrm{L}^t)\mathrm{L} = \mathrm{I}$

7. et finalement $\varepsilon = \frac{1}{2}(\mathrm{B}-\mathrm{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

8. Il n'y a pas de déformation dans la rotation pure d'un corps, ceci pour un petit angle de rotation et donc aussi pour une rotation d'un angle fini, somme de rotations de petits angles.

Exo 5.4

1. Le champ de déplacement vaut : $\vec{u} = \mathrm{MM}' \begin{pmatrix} -\frac{xy}{R} \\ \frac{x^2}{2R} \end{pmatrix}$ et donc $\mathrm{L} = \mathrm{I} + \mathrm{grad}\,\vec{u} = \begin{pmatrix} 1-\frac{y}{R} & -\frac{x}{R} \\ \frac{x}{R} & 1 \end{pmatrix}$

2. le tenseur de Cauchy-Green **B** vaut : $\mathrm{B} = (\mathrm{L}^t)\mathrm{L} = \begin{pmatrix} \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(1-\frac{y}{R}\right)^2 & \frac{xy}{R^2} \\ \frac{xy}{R^2} & 1+\left(\frac{x}{R}\right)^2 \end{pmatrix}$

Et le tenseur de Green-Lagrange : $\varepsilon = \frac{1}{2}(\mathrm{B}-\mathrm{I}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 - 2\frac{y}{R} & \frac{xy}{R^2} \\ \frac{xy}{R^2} & \left(\frac{x}{R}\right)^2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -\frac{y}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ lorsque

x et y sont petits devant R en ignorant les termes au carré dans le tenseur de Green-Lagrange.

3. Le tenseur linéarisé des déformations vaut : $\varepsilon_{lin} = \frac{1}{2}\left(\text{gradu}+\left(\text{gradu}\right)^t\right) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Le tenseur linéarisé est bien identique au tenseur de Green-Lagrange dans l'approximation des petites déformations lorsque x et y sont petits devant R.
Si on prend 10% comme limite pour les petites déformations (i.e. $\left|\varepsilon_{ij}\right| < 0.1$), les conditions quantitatives sont :
$\left|\frac{x}{R}\right| < 0.1$ et $\left|\frac{y}{R}\right| < 0.1$ i.e. la zone centrale de la plaque et même toute la plaque si L $\ll$ R.
5. La ligne neutre est donnée par y = 0.
6. compression pour y > 0 et traction pour y < 0.

Exercice 5.6 : écrasement axisymétrique

On reprend l'exercice 5.5 mais en condition axisymétrique. On considère donc la déformation par compression entre deux plans parallèles d'un lopin de métal rond de rayon initial R et de hauteur 2h. Après écrasement, le lopin présente une hauteur 2h' et un rayon maximum R'. Par symétrie du problème, on travaille en coordonnées cylindriques où la déformation est indépendante de l'angle θ. La figure de l'exercice 5.5 présente alors la situation pour un quart de ce lopin dans une coupe à angle θ constant.
Lors de l'écrasement, un point M de coordonnées cylindriques (r,θ,z) se déplace en M'(r',θ,z') donné par les équations :

$$r' = r\left[1+\varepsilon_R \frac{z}{h}\left(2-\frac{z}{h}\right)\right] \text{ et } z' = \left(1+\varepsilon_h\right)z \text{ avec } \varepsilon_R = \frac{R'-R}{R} \geq 0 \text{ et } \varepsilon_h = \frac{h'-h}{h} \leq 0$$

1. Calculez le champ de déplacement u.
2. Déterminez le ou les points qui présentent un déplacement nul.
3. Déterminez le ou les points qui présentent un déplacement radial nul.
4. Calculez directement le tenseur linéarisé des petites déformations ε en utilisant le tenseur gradient d'un vecteur **u** en coordonnées cylindriques.
5. Sous quelles **conditions qualitatives** l'écrasement peut-il être considéré comme une petite déformation en tout point du lopin ?
6. Sous quelles **conditions quantitatives** aura-t-on une petite déformation limitée à 10% en tout point du lopin ?
7. Déterminez les points du lopin qui subissent une déformation isochore, i.e. une déformation à volume constante. On prendra ici ε_R = 1% et ε_h = -0.5 %.
8. Calculez le tenseur des rotations de petits angles.
9. Déterminez les points qui ne subissent aucune rotation.

Corrigé:

1. $\vec{u} = \rho\left[\varepsilon_R \frac{z}{h}\left(2-\frac{z}{h}\right)\right]\vec{e}_r + \varepsilon_h z\, \vec{e}_z$ et le rayon maximum est obtenu en z = h et vaut $R(1+\varepsilon_R)$
2. $\vec{u} = \vec{0}$ pour z = 0 soit le plan inférieur
3. $u_r = 0$ pour ρ=0 (axe) ou z = 0 ou 2h, faces inférieures et supérieures

4. $\varepsilon=\frac{1}{2}(\nabla u+\nabla u^t)=\begin{pmatrix}\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho} & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial u_\rho}{\partial z}\\ 0 & \frac{u\rho}{\rho} & 0\\ \frac{1}{2}\frac{\partial u_\rho}{\partial z} & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_R\frac{z}{h}\left(2-\frac{z}{h}\right) & 0 & \varepsilon_R\frac{\rho}{h}\left(1-\frac{z}{h}\right)\\ 0 & \varepsilon_R\frac{z}{h}\left(2-\frac{z}{h}\right) & 0\\ \varepsilon_R\frac{\rho}{h}\left(1-\frac{z}{h}\right) & 0 & \varepsilon_h\end{pmatrix}$

5. Comme le facteur z/h est fini, ε sera de petites déformations pour ε_R et ε_h suffisamment petits.

6. Plus qualitativement, on peut se donner 10 % comme limite de déformation :

$$\left|\varepsilon_R\frac{z}{h}\left(2-\frac{z}{h}\right)\right|=\varepsilon_R\left|\frac{z}{h}\right|\left|2-\frac{z}{h}\right|\le\varepsilon_R\le 10\%\text{ soit }0\le\varepsilon_R\le 10\%,\ |\varepsilon_h|\le 10\%$$

$$et\ \left|\varepsilon_R\frac{\rho}{h}\left(1-\frac{z}{h}\right)\right|\le\varepsilon_R\frac{R}{h}\left|1-\frac{z}{h}\right|\le\varepsilon_R\frac{R}{h}\le 10\%\quad\text{car }0\le\varepsilon_R\quad\text{soit }\frac{R}{h}\le\frac{10\%}{\varepsilon_R}$$

7. la trace de ε doit être nulle (déformation à volume constant) avec $\varepsilon_R = 1\%$ et $\varepsilon_h = -0.5\ \%$.

$$\mathrm{tr}\varepsilon=2\varepsilon_R\frac{z}{h}\left(2-\frac{z}{h}\right)+\varepsilon_h=0\ \text{ soit }\left(\frac{z}{h}\right)^2-2\left(\frac{z}{h}\right)-\frac{\varepsilon_h}{2\varepsilon_R}=0\ \text{ avec }-\frac{\varepsilon_h}{2\varepsilon_R}=\frac{0.5}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{z}{h}=\frac{2\pm\sqrt{4-4\frac{1}{4}}}{2}=1\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \text{ les 2 plans: }z=\left(1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)h$$

8. rotations de petits angles

$$d=\frac{1}{2}(\nabla u-\nabla u^t)=\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial u_\rho}{\partial z}\\ 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2}\frac{\partial u_\rho}{\partial z} & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \varepsilon_R\frac{\rho}{h}\left(1-\frac{z}{h}\right)\\ 0 & 0 & 0\\ -\varepsilon_R\frac{\rho}{h}\left(1-\frac{z}{h}\right) & 0 & 0\end{pmatrix}$$

9. rotations nulles ssi $\varepsilon_R\frac{\rho}{h}\left(1-\frac{z}{h}\right)=0$ si $\rho = 0$ (axe) ou z = h (ligne à mi-hauteur).